図１の三角形 ABC は AB=4cm、BC=3cm、CA=5cm の直角三角形です。
また、三角形 EDA は三角形 ABC と合同で、辺 AB 上に点 D があります。
CE と BD が交わる点を F とするとき、次の問いに答えなさい。

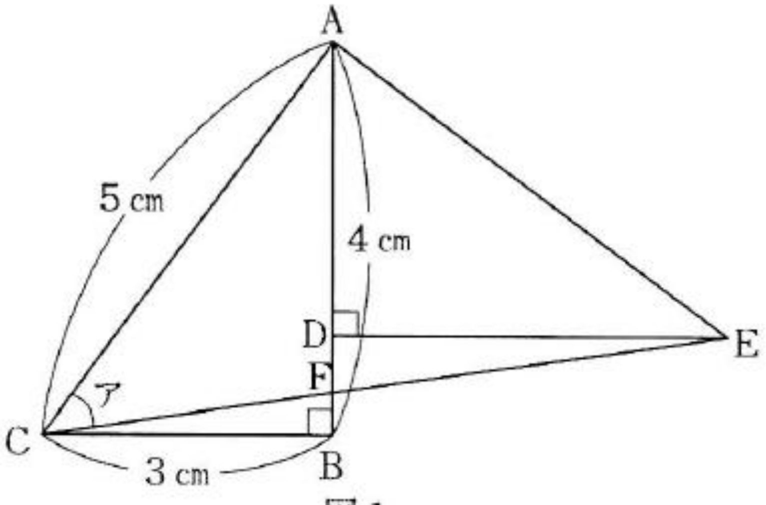


図１

(１)アの角度は何度ですか
(２)DF の長さは何 cm ですか。
(３)図２のように、点 D を通り、CE に平行な直線を引き、AC、AE と交わる点をそれぞれ G、H とします。このとき三角形 AGH の面積は何ｃ㎡ですか。

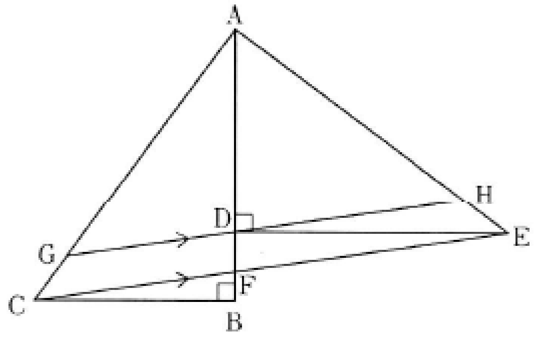


図2

（1）45 度

（2）$\frac{4}{7}$cm

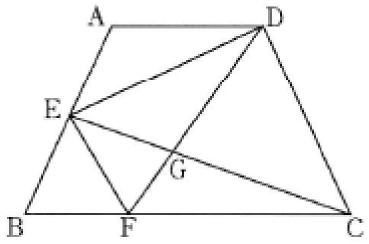
（3） $8\frac{41}{50}$c ㎡

図のように AD=３cm、BC=6cm、AE:EB=１:１、BF：FC=１ ： ２、AB=CD である台形ABCD があります。このとき次の問いに答えなさい。

(１)三角形 CDE と台形 ABCD の面積の比を最も簡単な整数の比で答えなさい。

(２)DF:GF を最も簡単な整数の比で答えなさい。

(３)三角形 CDG と三角形 CEF の面積の比を最も簡単な比で答えなさい。



（1）1 :2

（2）9:4

（3）18:13

2021年の問題

図１の三角形ABCはAB=4cm、BC=3cm、CA=5cmの直角三角形です。

また、三角形EDAは三角形ABCと合同で、辺AB上に点Dがあります。

EDAはABCと合同なので長さ4cmと3cmと5cmをEDAに書き込み、角も同じ印を同じ位置に書き込む。○+×=90度なので角CAEが90度、AE=AC=5cmなので直角二等辺三角形と判明する。

CEとBDが交わる点をFとするとき、次の問いに答えなさい。

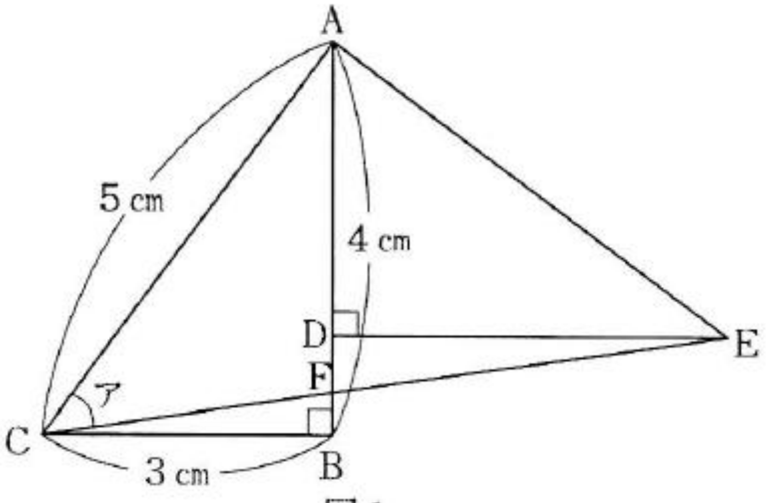


図１

(４)アの角度は何度ですか

ACEは直角二等辺三角形なので45度

(５)DFの長さは何cmですか。

DFを含む図形に注目する。三角形DFEがあるがDEは長さがわかっている。

またDBも長さがすぐに1cmとわかることからDEFとBCFが砂時計で相似比がわかる形になっていることに気がつけるはず。

DF:FB=4:3なので DF=$\frac{4}{7}$cm

(６)図２のように、点Ｄを通り、CE に平行な直線を引き、AC、AE と交わる点をそれぞれ
平行という言葉をさらっと流してはいけない。平行線は等しい角が作りやすく、相似も出てくる。
G、H とします。このとき三角形 AGH の面積は何ｃ㎡ですか。
AGH とは三角形 ACE と相似な図形(ピラミッド型)
(１)より直角二等辺三角形とわかっている AGH の面積を求めるのは容易。
相似比さえわかってしまえば面積がだせるとわかる。

ここで(２)がなんのためにあるか考えると、わざわざ DF を相似を使って求めている。
DF はちょうど(３)で相似比を求めようとしている三角形のあいだの部分だ。
(２)の長さを使えば相似比を求めることができるとわかる。

AD:AF が相似比になるので

$3 : 3+\frac{4}{7} = 21 : 25$

面積比は 441；625 なので面積が求められる。

$5 \times 5 \div 2 \times \frac{441}{625} = 8\frac{41}{50}$

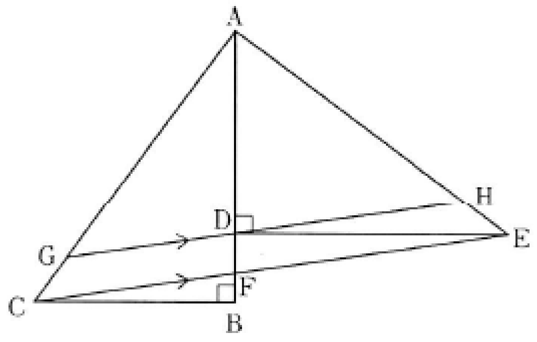


図２

ポイント

$\boxed{\text{問題分の指示を図に書き込んでいくこと}}$

$\boxed{\text{聞かれている図形がなんなのかを理解すること}}$

$\boxed{\text{前問までに求めたものを利用する意識を持つこと}}$

2020年の問題

図のように AD=３cm、BC=6cm、AE:EB=１:１、BF：FC=１ ： ２、AB=CD である台形ABCDがあります。このとき次の問いに答えなさい。

BC=6cm で BF：FC＝1:2 までわかっているなら BF=2cm FC=4cm はすぐわかる。

(１)三角形 CDE と台形 ABCD の面積の比を最も簡単な整数の比で答えなさい。

CDE が斜めの三角形なので、無理に直接面積を出さず全体から引くことにする。

問題文から CDE 以外の部分の面積が出せないか考えると、上底も下底もわかっていて E は真ん中の点なので、AED、BEC が台形の何倍かが求められることがわかる。

台形 ABCD=(3+6)×2=18 とすると三角形は高さ半分。

AED＝3×1=3

BEC=6×1=6

CDE=18－9=9

9:18=1:2 とわかる。

(２)DF:GF を最も簡単な整数の比で答えなさい。

DF:GF なのでつまり DG：GF をもとめたらいい。

DG と GF が同時に出てくる相似の組み合わせを考えて、砂時計の形が思い浮かぶようにしておきたい。

砂時計をつくるために

AD と CE を延長させる(交点を H としておく)

HDG と CFG の相似比がわかったらそれが答えになるけど現時点では不明

HA の長ささえわかれば相似比がだせるのに……

そこで HA を含む別の砂時計に注目する HAE と CBE も相似でさらに AE=BE

HA：BC=１ ： １なので HA＝6cm

HA がわかったことでもともとほしかった砂時計の相似比が求められる。

HD＝9cm と FC=4cm を利用する

DG:GF=HD:CF=9:4

求める比をまちがえないように注意

よって 13：4

(３)三角形 CDG と三角形 CEF の面積の比を最も簡単な比で答えなさい。

(２)で 9:4 がわかったので DGC と GFC の比は 9:4 というのはもうわかっている。

目標は EGF。EG:GC の長さがわかればここもわかるのでこの比を求める問題だとわかる。

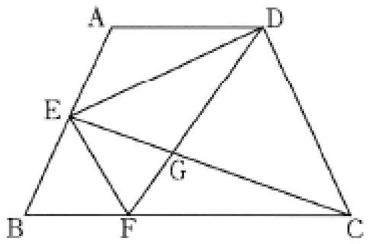
(２)を解く時に延長した図がある。砂時計が複数あった。ここまで来れば、二つの砂時計の相似比で和一定を使う問題を経験していれば気がつくのではないか。

HG=GC=9:4

HE=EC なので比で表すと HE＝EC=(9+4)÷2=6.5

HE:EG:GC=6.5:2.5:4 になるので EG:GC=5:8

DGC；CEF＝9：$(4+4\times\frac{5}{8})$=18:13



ポイント

$\boxed{\text{斜めの三角形は全体から引く方法を疑う}}$

$\boxed{\text{目標から逆算して相似を探す、延長してつくる}}$

$\boxed{\text{ひとつ目の砂時計で長さを求めて、２つ目の砂時計で比を求めるパターン}}$

$\boxed{\text{今、わかっていることと何がわかれば答えが求められるか整理する}}$

$\boxed{\text{前問までにわかったことを利用する}}$

(２)以降別解

というよりおそらくこちらが学校の意図した本解。前述の相似の利用の仕方はぜひ知っておいて欲しいので紹介したが今回の問題では(１)を意識することで面積比のみで解くことができる。(思いつきにくいと思うが前問の誘導に乗る力があればこちらでも解ける)

さきほど同様に DG：GF を考える。

DG：GF とは<u>三角形 DCE の面積：三角形 CEF の面積と同じ</u>

DCE は(1)より ９とおける

CEF は 4×１=4 なので <u>9:4 となる</u>。

三角形 CDF＝4×2=8 なので三角形 CDG=$8\times\frac{9}{9+4}=\frac{72}{13}$

CDG:CEF=$\frac{72}{13}$:4=<u>18:13</u>

面積比を使えると実に鮮やかに前問が利用できますね。

(１)１:2

(２)9:4

(３)18:13